DEVOIR DE SYNTHESE N°2

EXERCICE N°1 :	10'	3 points	

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\int_1^x \frac{\cos^2 t}{t}\,dt$.

Répondre par **vrai** ou **faux** à chacune des affirmations suivantes, **en justifiant la réponse**.

1°) Pour tout $x>0$, $f'(x)\geq 0$.

2°) Pour tout $x>0$, $f(x)\geq 0$.

3°) $f(2)\leq \ln 2$.

EXERCICE N°2 :	30'	5 points	

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points : $A(3,-2,2)$; $B(6,1,5)$ et $C(6,-2,-1)$

1°) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A, puis calculer son aire.

2°) Montrer que le plan P dont une équation cartésienne est $x+y+z-3=0$, passe par A et perpendiculaire à la droite (AB).

3°) Donner une équation cartésienne du plan Q passant par A et perpendiculaire à (AC)

4°) On considère le droite Δ donnée par le système de représentation paramétrique suivant :

$$\begin{cases} x=-1+ln(e^2.t) \\ y=2+ln\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (t\in IR_+^*) \\ z=ln(t) \end{cases}$$

a) Montrer que les plans P et Q sont sécants suivant la droite Δ. (poser $\alpha=Ln(t)$)

b) Vérifier que le point $D(0,4,-1)$ appartient à la droite Δ.

c) Vérifier que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) et déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

5°) a) Vérifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires, et calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

b) Déterminer une mesure (en radian) de l'angle BDC.

6°) a) Calculer l'aire du triangle BDC.

b) Déduire la distance A au plan (BDC).

7°) Préciser l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant : $(x+y+z-3)^2+(x-z-1)^2=0$

8°) Déterminer les centres des sphères tangentes au plan P en A et de rayon $r=3\sqrt{3}$

9°) Soit (S_m) la sphère de centre B et de rayon m. (avec $m\in IR_+^*$)

a) Déterminer les valeurs de m pour lesquels (S_m) et P sont sécants suivant un cercle de rayon 3.

b) Préciser : $(S_5\cap P)$ puis $(S_6\cap P)$.